

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Механіко-математичний факультет
Кафедра математичного і функціонального аналізу

Лекції
з математичного аналізу для студентів
механіко-математичного факультету
/I курс, I семестр/
/рукопис/

Зміст

1	Вступ до математичного аналізу	3
1.1	Елементи математичної логіки	3
1.1.1	Логіка висловлень	3
1.1.2	Логіка предикатів.	8

Вступ

Студентам математикам пропонується робочий текст лекцій, який вони слухають протягом I семестру. Він відповідає програмі курсу математичного аналізу, яка є в "Методичних вказівках до вивчення кусу математичного аналізу для студентів механіко-математичного факультету". Разом з конспектом ці лекції будуть основою для вивчення курсу математичного аналізу. Про використання іншої літератури вказано у вступі в "Методичних вказівках до вивчення кусу математичного аналізу для студентів механіко-математичного факультету" і в кожному розділі програми курсу.

Автор просить вибачення за можливі помилки в робочому тексті (математичні, граматичні, стилістичні).

Разом з тим автор просить студентів I курсу виявляти і фіксувати ці помилки. На якомусь етапі найбільш активні в знаходженні помилок (математичних, граматичних чи стилістичних) будуть відзначені.

1 Вступ до математичного аналізу

1.1 Елементи математичної логіки

1.1.1 Логіка висловлень

Поняття про висловлення.

В логічних міркуваннях ми користуємося природньою мовою, яка складається з речень. В математичних міркуваннях всі речення повинні мати певне логічне значення: повинні бути істинні або хибні.

Речення, які мають певне логічне значення (є істинні або є хибні), будемо називати висловленнями.

Приклад 1.

а) *Київ - столиця України.*

б) $2 > 3$.

в) $x > 1$.

г) 2 - ціле число.

д) *Ой!*

Тут а), б), г) є висловленнями, в), д) - ні.

Звернімо увагу на те, що у висловленні нас буде цікавити не зміст, а тільки значення істинності. Висловлення будемо позначати малими буквами $p, q, r, s, \dots$. Те, що висловлення p є істинне (хибне), будемо позначати $p = i$ ($p = x$)

Подібно, як в звичайній мові, є прості та складні речення, в математичній мові розглядаємо прості та складні висловлення.

Приклад 2. . Висловлення

$s = \text{"Число } 2 \text{ ціле і раціональне"}$

складається з двох простих висловлень

$p = \text{число } 2 \text{ - ціле}$

$q = \text{число } 2 \text{ - раціональне.}$

Використовуючи введені позначення, можна записати $s = p \text{ і } q$.

При утворенні нових висловлень з простих ми можемо користуватись сполучниками "і", "або", "якщо, то", "тоді і тільки тоді, якщо", а також запереченням.

Вправа 1. Використовуючи висловлення p, q з наведеного вище прикладу, сформулюйте складні висловлення: $p \text{ і } q$, $p \text{ або } q$, якщо p , то q , p тоді і тільки тоді, якщо q .

Постає питання, як істинність складного висловлення залежить від істинності(хибності) простих висловлень. Відповідь на це питання дасть розгляд поняття операцій (дій) над висловленнями.

Операції над висловленнями.

Процесу утворення з одного чи двох простих висловлень іншого висловлення в математичній логіці відповідають логічні операції.

Будемо розглядати 5 логічних операцій:

заперечення, позначається $\neg$; $\neg p$ читається неправда, що p ;

кон'юнкція, позначається $\wedge$; $p \wedge q$ читається p і q ;

диз'юнкція, позначається $\vee$; $p \vee q$ читається p або q ;

імплікація, позначається $\Rightarrow$; $p \Rightarrow q$ читається якщо p , то q ;

еквіваленція, позначається $\Leftrightarrow$; $p \Leftrightarrow q$ читається p тоді і тільки тоді, якщо q .

Логічні значення висловлень утворених з допомогою цих операцій, визначається з допомогою наступних таблиць

p	$\neg p$
x	i
i	x

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
x	x	x	x	i	i
x	i	x	i	i	x
i	x	x	i	x	x
i	i	i	i	i	i

Логічні значення кон'юнкції та диз'юнкції повністю співпадають з нашою інтуїцією. Висловлення p або q є істинне коли хоча б одне з них є істинне, а висловлення p і q істинне тільки тоді коли обидва висловлення є істинні.

Визначення імплікації опирається на наступні міркування: з істинних припущень мусимо прийти до істинного наслідку, з хибних припущень можна отримати що завгодно.

Формули логіки висловлень

Будуючи складні висловлення, які мають кілька простих висловлень ми змушені використати дужки, щоб вказувати порядок виконання логічних операцій (як при виконанні алгебраїчних дій). Правильно написані прості та складні висловлення будемо називати формулами. Для їх написання використовують наступні правила:

1. $p, q, r, \dots, i, x$ - формули.
2. Якщо φ, ψ - формули, то $(\neg\varphi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \Rightarrow \psi), (\varphi \Leftrightarrow \psi)$ - формули.
3. Інших формул немає.

Приклади

а) $(p \vee q), (((\neg p) \Rightarrow q) \vee r)$ - формули

б) $(p \Rightarrow) \vee q, p \Rightarrow (q \vee r), p \Rightarrow q \Rightarrow r$ - не є формулами.

Для спрощення запису формул встановлено ієрархію "сили" операцій (як в алгебрі). Найсильніше зв'язує операція $\neg$, потім $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Тому прийнято опускати зовнішні дужки, а також, враховуючи домовленості, деякі внутрішні дужки.

Приклад. Замість запису формули у вигляді

$$(((\neg p \wedge q) \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \vee q))$$

будемо вживати спрощений запис

$$(\neg p \wedge q \Rightarrow p) \Leftrightarrow p \vee q$$

Табличка істинності формули

Розглянемо формулу $\varphi = p \wedge q \Rightarrow r$. Знайдемо значення істинності формули при довільних наборах значень істинності p, q, r . Для цього побудуємо її таблицку істинності. Одночасно побудуємо ще таблицку істинності для формули $\psi = p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q$.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow r$	$\neg r$	$\neg q$	$p \wedge \neg r$	$p \wedge \neg r \Rightarrow q$
x	x	x	x	i	i	i	x	i
x	x	i	x	i	x	i	x	i
x	i	x	x	i	i	x	x	i
x	i	i	x	i	x	x	x	i
i	x	x	x	i	i	i	i	i
i	x	i	x	i	x	i	x	i
i	i	x	i	x	i	x	i	x
i	i	i	i	i	x	x	x	i

Ми побудували таблички істинності двох формул φ і ψ , які містять три висловлення p, q, r і кожне з висловлень може приймати два значення істинності - i, x . Якщо формула містить чотири висловлення, то різних наборів значень істинності буде $2^4 = 16$, а при n - висловленнях - 2^n .

Рівносильні формули.

Нехай φ і ψ формули, які містять одні і тіж висловлення $p, q, r, \dots$. Позначимо це так : $\varphi(p, q, r, \dots)$, $\psi(p, q, r, \dots)$. Будемо говорити, що формули $\varphi(p, q, r, \dots)$ і $\psi(p, q, r, \dots)$ рівносильні, якщо вони приймають однакові значення істинності при довільних наборах значень істинності висловлень $p, q, r, \dots$.

Наприклад, формули $\varphi = p \wedge q \Rightarrow r$ і $\psi = p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q$ рівносильні. Стовпці (5) і (9) в їх табличці істинності співпадають.

Те, що формули φ і ψ рівносильні будемо позначати так:

$$\varphi \equiv \psi.$$

Щоб перевірити рівносильність двох формул достатньо побудувати таблички істинності і їх порівняти.

Приклад 3. Довести, що $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$. Побудуємо табличку істинності обох формул.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
x	x	i	i	i	i
x	i	i	x	i	i
i	x	x	i	x	x
i	i	i	x	x	i

Третій стовпчик співпадає з шостим, значить формули рівносильні.

Розглянемо деякі наслідки з розглянутих прикладів.

З того, що висловлення $p \wedge q \Rightarrow r$ і $p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q$ рівносильні, випливає рівносильність висловлень

а) "Якщо число ділиться на 2 і ділиться на 3, то число ділиться на 6" $\equiv$ "Якщо число ділиться на 2 і не ділиться на 6 то воно не ділиться на 3."

б) "Якщо послідовність монотонна і обмежена, то вона збіжна" $\equiv$ "Якщо послідовність монотонна і не збіжна, то вона не обмежена."

Зауважимо, що правильність рівносильності а) може оцінити студент, який знайомий з елементарною математикою, проте рівносильність б) не є очевидною для тих хто не знає поняття збіжності послідовності.

Отже ми отримали апарат (спосіб) переходити від одного істинного висловлення до іншого, не знаючи змісту цих висловлень.

Основні рівносильності.

Запишемо перелік найбільш важливих рівносильностей формул, які виражають властивості логічних операцій. Ці рівносильності випливають або з означень цих операцій, або легко показуються з допомогою побудови табличок істинності

1. $\neg(\neg p) \equiv p$
2. $p \wedge q \equiv q \wedge p$
3. $p \vee q \equiv q \vee p$
4. $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
5. $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
6. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
7. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
8. $p \wedge p \equiv p$
9. $p \vee p \equiv p$
10. $p \wedge \neg p \equiv x$
11. $p \vee \neg p \equiv i$
12. $p \wedge i \equiv p$
13. $p \wedge x \equiv x$
14. $p \vee i \equiv i$
15. $p \vee x \equiv p$
16. $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
17. $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
18. $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
19. $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

Побудуємо таблицьки істинності щоб показати справедливність рівносильностей 16) і 18).

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
x	x	x	i	i	i	i
x	i	x	i	i	x	i
i	x	x	i	x	i	i
i	i	i	x	x	x	x

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
x	x	i	i	i
x	i	i	i	i
i	x	x	x	x
i	i	i	x	i

З допомогою основних рівносильностей можна перетворювати формули і доводити рівносильності

Приклад 4. Довести, що $p \wedge q \Rightarrow r \equiv p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q$.

$$p \wedge q \Rightarrow r \stackrel{(18)}{\equiv} \neg(p \wedge q) \vee r \stackrel{(16)}{\equiv} (\neg p \vee \neg q) \vee r \stackrel{(5)(3)}{\equiv} (\neg p \vee r) \vee \neg q \stackrel{(1)(16)}{\equiv} \neg(p \wedge \neg r) \vee \neg q \stackrel{(18)}{\equiv} p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q$$

Вправа 2. Використовуючи рівносильності 1-19 довести наступні рівносильності.

1. $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$
2. $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$
3. $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \equiv p$
4. $p \vee \neg p \wedge q \equiv p \vee q$
5. $\neg p \wedge (p \vee q) \equiv \neg p \wedge q$
6. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv p \wedge q \Rightarrow r$

Вправа 3. Наступні формули з допомогою перетворень привести до простішого вигляду

1. $\neg((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \neg p))$
2. $(p \Rightarrow \neg q) \vee \neg(p \vee q)$
3. $\neg(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \Rightarrow q) \wedge p$

Тотожньо істинні формули.

Формула, яка приймає значення "і" при всіх наборах значень істинності висловлень, що входять в цю формулу називається тотожньо істинною або тавтологією.

Те, що формула φ є тотожньо істинною, будемо позначати так: $\models \varphi$.

Легко довести твердження

Якщо $\varphi \equiv \psi$, то $\varphi \Leftrightarrow \psi$ тотожньо істинна формула і навпаки.

Наведемо приклади найважливіших тотожньо істинних формул.

1. $p \Leftrightarrow \neg\neg p$ - закон подвійного заперечення.
2. $p \vee \neg p$ - закон виключення третього.
3. $\neg(p \wedge \neg p)$ - закон виключення суперечності.
4. $p \Rightarrow p$ - закон тотожності.
5. $p \wedge p \Leftrightarrow p$
6. $p \vee p \Leftrightarrow p$
7. $p \Rightarrow q \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
8. $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
9. $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$
10. $(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$

Тотожньо істинні формули виражають закони логіки висловлень. Приклади їх використання будуть розглядатись пізніше.

Приклад 5. Проаналізуймо чи вірні логічні міркування студентки.

"Він казав, що приїде, якщо не буде дощ. Падає дощ. Значить він не приїде."

Студентка, яка вчила логіку, зробить так: Позначимо висловлення

p - не падає дощ.

q - він приїде.

Тоді приведені міркування запишуться висловленням

$$(p \Rightarrow q) \wedge \neg p \Rightarrow \neg q$$

Щоб міркування було логічним, потрібно щоб ця формула була тотожньо істинною. Однак при p - хибному і q - істинне, формула приймає значення хибне.

Отже це не є закон логіки. І може статись, що падатиме дощ і він приїде. Він же не сказав, що буде у разі дощу!

Вправа 4. Проаналізуйте правильність міркувань *"Якщо Джон був би солдатом, він був би відважним. Джон не солдат. Значить Джон є боягузом."*

Цим прикладом закінчимо розгляд логіки висловлень. Глибше логіку студенти механіко-математичного факультету розглядають у спеціальному курсі математичної логіки.

1.1.2 Логіка предикатів.

Поняття про предикат.

Розглянемо такі речення.

- 1) $x > 1$.
- 2) існує таке число a , що $a > 2$.
- 3) для довільного числа x $x > 2$.
- 4) через точку A проходить пряма l
- 5) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- 6) $x + y$.
- 7) $x^2 + y^2 = z^2$.
- 8) $a < b$.
- 9) $a * b = c$.
- 10) рівнобедрений трикутник є рівностороннім.

Деякі з наведених речень є істинними або хибними, а саме твердження 2) істинне, тоді як 3) хибне. Отже названі речення є висловленнями. Про істинність інших речень нічого не можна сказати. Розглянемо речення 5). На перший погляд воно здається істинним. Але насправді це не так, бо не сказано нічого про a та b (це числа?, це матриці?, і т.д.). Кожне з розглянутих речень містить змінні. Якщо ці змінні зафіксувати або зв'язати умовою ("існує", "довільна") то ці речення можуть стати висловленням. Наприклад,

- 1) при $x = 2$, $x > 1$, або існує x для якого $x > 1$.
- 2) для довільних дійсних чисел a і b виконується $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- 9) існують дійсні числа для яких $a + b = c$.
- 10) існує рівнобедрений трикутник, який є рівностороннім або інакше
- 10) довільний рівнобедрений трикутник є рівностороннім.

Змінні, які входять в речення будемо називати *вільні або предметні змінні*. Це можуть бути величини, геометричні фігури, операції і т.д.

Так в 1) є одна змінна x , в 4) дві змінні A і l , в 7) три змінні x, y, z , в 9) чотири змінні $a, b, c, *$, в 10) одна змінна "трикутник".

Речення 6) є відмінне від інших. При фіксуванні змінних воно не стає висловленням.

Предикатом називається довільне речення, яке містить вільні змінні і перетворюється у висловлення при заміні змінних константами або зв'язаними змінними.

Предикати будемо позначати так:

$P(x), Q(x), R(z), \dots$ - предикат з однією предметною змінною.

$P(x, y), S(a, b), \dots$ - предикати з двома предметними змінними

$P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - предикат з n предметними змінними, або просто $P, Q, R, S, \dots$

Приклад 6. а) $P(x, y) = [x > y]$.

б) $Q(a, b, c) = [a^2 + b^2 = c^2]$

Кожний предикат (речення) розглядається на певній сукупності предметних змінних. Про природу цих змінних ми знаємо з контексту речення. Наприклад в предикаті $P(x, y) = [x > y]$ розглядаються пари величин x, y , які можна порівнювати. Так для пари $(2, 1)$ $P(2, 1)$ - істинне, а для пари $(3, 5)$ $P(3, 5) = [3 > 5]$ - хибне висловлення.

Рівносильні предикати.

Предикати P і Q будемо називати рівносильними, якщо при довільних фіксованих значеннях предметних змінних відповідні висловлення (тобто значення предикатів) рівносильні.

Рівносильність предикатів будемо позначати так : $P \equiv Q$

Приклад 7. 1) $P(x) = [|x| < 1]$ $Q(x) = [x^2 < 1]$ $P(x) \equiv Q(x)$

2) $P(x, y) = [x < y]$ $Q(x) = [x^2 < y^2]$

$P(x, y) \not\equiv Q(x)$, бо при $x = -2$ і $y = -1$ $P(-2, -1)$ висловлення істинне, а $Q(-2, -1)$ - висловлення хибне.

Операції над предикатами.

Над предикатами можна виконувати ті самі логічні операції, що й над висловленнями $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. Ці операції визначаються такими рівносильностями.

$$(\neg P)(x) \equiv \neg P(x)$$

$$(P \wedge Q)(x) \equiv P(x) \wedge Q(x)$$

$$(P \vee Q)(x) \equiv P(x) \vee Q(x)$$

$$(P \Rightarrow Q)(x) \equiv P(x) \Rightarrow Q(x)$$

$$(P \Leftrightarrow Q)(x) \equiv P(x) \Leftrightarrow Q(x)$$

Так кон'юнкція предикатів P і Q називається предикат $P \wedge Q$, істинність значень якого визначаються звичайним способом - як кон'юнкція відповідних істиннісних значень складових предикатів $P(x)$, $Q(x)$.

Приклад 8. а) $P(x) = [x - \text{просте число}]$, $Q(x) = [x > 5]$ $(P \wedge Q)(x) = [x - \text{просте число і } x > 5]$.

б) $P(x) = [x - \text{просте число}]$, $Q(a) = [a > 3]$ $(P \wedge Q)(x, a) = [x - \text{просте число і } a > 3]$.

У випадку а) $P \wedge Q$ - одномісний предикат, у випадку б) $P \wedge Q$ - двомісний предикат.

.

Введені операції над предикатами переводять предикати у предикати.

Для предикатів вірні рівносильності 1)-19), які були доведені для висловлювань.

Розглянемо ще дві операції над предикатами, які предикати переводять у висловлення.

Операції квантування предикатів.

Перша операція квантування позначається символом $\forall$. Вона предикат $P(x)$ переводить у висловлення $\forall x P(x)$ - читається "для довільного x виконується $P(x)$."

Символ $\forall$ називається квантором загальності.

Друга операція позначається символом $\exists$. Вона предикат $P(x)$ переводить у висловлення $\exists x P(x)$ - читається "існує x для якого виконується $P(x)$."

Іноді на змінні при квантуванні є накладені умови. Наприклад, $\forall x > 0 [x > -1]$.

Символ $\exists$ називається квантором існування.

Нехай змінна x в предикаті $P(x)$ може приймати скінченну множину значень $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

Тоді операції квантування можна визначити через наступні рівносильності

$$\forall x P(x) \equiv P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)$$

$$\exists x P(x) \equiv P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)$$

Вирази, які записані у попередніх рівносильностях справа будемо позначати відповідно

$$\bigwedge_{i=1}^n P(a_i) \quad \text{і} \quad \bigvee_{i=1}^n P(a_i)$$

Приклад 9. Нехай $P(x) = x$ - просте число. Тоді $\forall x P(x)$ - хибне висловлення, а $\exists x P(x)$ - висловлення істинне.

У випадку коли $P(x, y)$ двомісний предикат, можливі вісім способів його квантування.

1. $\forall x \forall y P(x, y)$
2. $\forall y \forall x P(x, y)$
3. $\exists x \exists y P(x, y)$
4. $\exists y \exists x P(x, y)$
5. $\forall x \exists y P(x, y)$
6. $\exists y \forall x P(x, y)$
7. $\exists x \forall y P(x, y)$
8. $\forall y \exists x P(x, y)$

Деякі з отриманих заквантованих предикатів відрізняються тільки порядком квантування. Цікаво, чи будуть вони рівносильними висловлюваннями?

Властивості операцій квантування предикатів.

Розглянемо довільний двомісний предикат $P(x, y)$. Для простоти доведення будемо вважати, що змінні x і y можуть приймати скінченну кількість значень, а саме

$$x - a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$y - b_1, b_2, \dots, b_m$$

Властивість 1. В заквантованому двохмісному предикаті одноіменні квантори можна переставляти і будемо мати рівносильні висловлення. Різні квантори переставляти, взагалі кажучи, не можна.

Доведення. Для цього покажемо наступні рівносильності висловлень

$$\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$$

$$\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y)$$

Для доведення скористаємось означенням операцій квантування і властивостями операцій над висловленнями (комутативність, асоціативність).

Доведемо першу рівносильність.

$$\begin{aligned} \forall x \forall y P(x, y) &\equiv \bigwedge_{i=1}^n \left(\bigwedge_{j=1}^m P(a_i, b_j) \right) \equiv \\ &\equiv \bigwedge_{i=1}^n (P(a_i, b_1) \wedge P(a_i, b_2) \wedge \dots \wedge P(a_i, b_m)) \equiv \\ &\equiv (P(a_1, b_1) \wedge P(a_1, b_2) \wedge \dots \wedge P(a_1, b_m)) \wedge \dots \wedge (P(a_n, b_1) \wedge P(a_n, b_2) \wedge \dots \wedge P(a_n, b_m)) \equiv \\ &\equiv (P(a_1, b_1) \wedge P(a_2, b_1) \wedge \dots \wedge P(a_n, b_1)) \wedge \dots \wedge (P(a_1, b_m) \wedge P(a_2, b_m) \wedge \dots \wedge P(a_n, b_m)) \equiv \\ &\equiv \bigwedge_{j=1}^m (P(a_1, b_j) \wedge P(a_2, b_j) \wedge \dots \wedge P(a_n, b_j)) \equiv \bigwedge_{j=1}^m \left(\bigwedge_{i=1}^n P(a_i, b_j) \right) \equiv \forall y \forall x P(x, y) \end{aligned}$$

Аналогічно доводиться друга рівносильність. Щоб показати, що переставляти різноіменні квантори не можна, досить навести один приклад. Нехай $P(x, y) = [x < y]$. Тоді

$$\forall x \exists y P(x, y) \not\equiv \exists x \forall y P(x, y),$$

оскільки висловлення зліва істинне, а висловлення справа - хибне.

Доведена властивість справджується і для предикатів n - місних для довільних n і кожна змінна може мати не тільки скінченну кількість значень.

Нехай $P(x)$ довільний предикат. Знову, для простоти доведення, будемо вважати, що змінна x може приймати скінченну кількість значень $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Властивість 2. Для довільного предиката $P(x)$ справджуються наступні рівносильності:

$$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

$$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$$

Доведення. Користуємось означенням операції квантування і основними рівносильностями, (16), (17), які вірні для довільної кількості висловлень

$$\begin{aligned} \neg \forall x P(x) &\equiv \neg(P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)) \equiv \\ &\equiv \neg P(a_1) \vee \neg P(a_2) \vee \dots \vee \neg P(a_n) \equiv \exists x \neg P(x) \end{aligned}$$

Аналогічно доводиться друга рівносильність.

З цієї властивості випливає наступне правило.

Щоб побудувати заперечення заквантованого предиката потрібно змінити квантор на супротивний (інший) і заперечити предикат.

Доведені властивості будуть надалі використовуватись для запису означень і тверджень, а також їх заперечень.

Приклад 10. Побудувати заперечення висловлень

а) "Для довільного числа x виконується нерівність $x < 2$." Використовуючи квантори це висловлення записується так: $\forall x [x < 2]$. Тут $[x < 2]$ є предикат. Далі будемо заперечення:

$$\neg \forall x [x < 2] \equiv \exists x \neg [x < 2] \equiv \exists x [x \geq 2]$$

б) Для довільних натуральних n і m : n ділиться на m .

$$\begin{aligned} \neg \forall n \forall m [n \text{ ділиться на } m] &\equiv \exists n \neg \forall m [n \text{ ділиться на } m] \equiv \\ &\equiv \exists n \exists m \neg [n \text{ ділиться на } m] \equiv \exists n \exists m [n \text{ не ділиться на } m] \end{aligned}$$

в) Функція $f(x) = x^2 + 3x + 5$ обмежена для всіх чисел x . Те, що функція $f(x)$ обмежена запишеться так:

$$\exists M \forall x [|f(x)| \leq M]$$

Тоді (аналогічно як в попередньому прикладі)

$$\neg(\exists M \forall x [|f(x)| \leq M]) \equiv \forall M \exists x \neg [|f(x)| \leq M] \equiv \forall M \exists x [|f(x)| > M]$$

Подумайте, чи без допомоги формальної логіки ви могли б записати це заперечення. Якщо так, то прекрасно!

г) Сформулювати, що означає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq a$.

Скористаємось шкільним означенням границі послідовності і запишемо його, використовуючи квантори:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \equiv \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} [n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon]$$

Тут вираз в квадратних дужках є предикатом $P(n_0, n, \varepsilon)$. Всі змінні n_0, n, ε є заквантовані. Користуючись правилом побудови заперечення і рівносильністю $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq a &\equiv \neg(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a) \equiv \neg(\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} [n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon]) \equiv \\ &\equiv \exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} [n > n_0 \wedge |x_n - a| \geq \varepsilon] \end{aligned}$$

Вправа 5. а) Доведіть, що

$$\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$$

$$\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$$

$$\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$$

$$\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \not\equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$$

б) Нехай $P(x) = [x - \text{просте число}]$, $Q(x) = [x - \text{раціональне число}]$, $I(x) = [x - \text{іраціональне число}]$, $H(x) = [x - \text{парне число}]$, $R(x, y) = [x - \text{ділиться на } y]$. Прочитайте надані висловлення, знайдіть їх істинне значення і побудуйте їх заперечення.

1. $\exists x \exists y [I(x) \wedge I(y) \Rightarrow Q(x - y)]$

2. $\exists x [P(x) \wedge R(x, -2)]$

3. $\forall x \forall y [P(x) \wedge P(y) \wedge R(x, y) \Rightarrow x = y]$

в) Записати з допомогою кванторів означення і їх заперечення.

1. Функція f періодична.

2. Функція f парна.

3. Функція f непарна.

4. Порівняти означення "функція f парна" і "функція f непарна."

Формулювання та класифікація теорем

Розглянемо деякі важливі застосування елементів математичної логіки.

Спочатку розглянемо "дитячу" задачу.

Вчитель питає учнів: "Трикутник має сторони довжини 3, 4 і 5 см. Який це трикутник?" Діти дружно відповідають: "Піфагоровий." На наступне запитання вчителя: "На основі якої теореми?" Діти (уже менш дружно): "Теореми Піфагора." Вчитель каже, що відповідь не вірна. Учні розгублені. Чому?

Проаналізуємо, що стверджує теорема Піфагора. Нехай $P(x) = [x - \text{трикутник прямокутний}]$, $Q(x) = [x - \text{сума квадратів менших сторін трикутника } x \text{ дорівнює квадрату більшої сторони}]$. Тепер теорему Піфагора можна сформулювати в такому вигляді.

$$\forall x - \text{трикутник} [P(x) \Rightarrow Q(x)]$$

А чим користувались учні в згаданій задачі?

$$\forall x - \text{трикутник} [Q(x) \Rightarrow P(x)]$$

Це не є теорема Піфагора, а обернена теорема Піфагора! Чи завжди з справедливості прямої теореми випливає справедливості оберненої?

Розглянемо теореми, які формуються у вигляді "Якщо P , то Q ." Тоді назвемо

- а) $P \Rightarrow Q$ - пряма теорема.
- б) $Q \Rightarrow P$ - обернена теорема.
- в) $\neg P \Rightarrow \neg Q$ - протилежна теорема.
- г) $\neg Q \Rightarrow \neg P$ - обернеа до протилежної(або протилежна до оберненої)

на основі властивості імплікації маємо такі рівносильності.

$$P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$$

і

$$Q \Rightarrow P \equiv \neg P \Rightarrow \neg Q$$

і звичайно не завжди $P \Rightarrow Q \neq Q \Rightarrow P$

На першій рівносильності ґрунтується спосіб доведення від супротивного: замість того, щоб доводити теорему $P \Rightarrow Q$, доводять теорему $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

У випадку коли правильні обидві теореми $P \Rightarrow Q$ і $Q \Rightarrow P$, тоді теорему записують у вигляді $P \Leftrightarrow Q$ і вона читається: " P тоді і тільки тоді, якщо Q ". Такі теореми називають ще "критерій", "принцип."

Якщо теорема $P \Rightarrow Q$ правильна, то кажуть, що P є достатньою умовою для Q , а Q - необхідною умовою для P . Якщо крім того вірна і обернена теорема $Q \Rightarrow P$, то P є не тільки достатньою, а й необхідною умовою для Q і навпаки: Q є не тільки необхідною, а й достатньою умовою для P . У такому разі теорему формулюють так: для того, щоб виконувалось P необхідно і достатньо, щоб виконувалось Q . Це записується так: $P \Leftrightarrow Q$, а вірніше $\forall x [P(x) \Leftrightarrow Q(x)]$. Необхідну і достатню умову в математиці називають ознакою.

Проаналізуємо, що означає, що P достатня умова для Q , але не є необхідною умовою. Запишемо так:

$$\begin{aligned} (P \Rightarrow Q) \wedge \neg(Q \Rightarrow P) &\equiv \\ &\equiv (P \Rightarrow Q) \wedge \neg(\neg Q \vee P) \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge Q \wedge \neg P \end{aligned}$$

Отже це означає, що з P випливає Q і має місце Q і $\neg P$.

Наприклад. Якщо трикутник рівносторонній, то він рівнобедрений. Умова "рівносторонній трикутник" є достатньою для умови "рівнобедрений трикутник", але не необхідною. Значить знайдеться трикутник рівнобедрений Q , однак не рівносторонній $\neg P$.

Проаналізуйте, що означає Q є необхідною умовою для P , але не є достатньою умовою.

Вправа 6. *Запишіть символічно дані теореми, сформулюйте обернену до неї, протилежну їй та обернену до протилежної. Які з них правильні?*

1. якщо $a \cdot b = 0$, то $a = 0$ або $b = 0$.
2. якщо $p, q, (q > 0)$ - дійсні числа, то корені квадратичного рівняння одного знаку.
3. Якщо натуральне число при діленні на 11 дає в залишку 4, то його квадрат в результаті ділення на 11 дає в залишку 5.
4. Якщо ціле число ділиться на 15, то воно ділиться на 3 і на 5.

В кожній теоремі сформулюйте необхідну і достатню умови.